



**Institute of Economic Research Working Papers**

**No. 12/2014**

**Modelowanie rozwoju gospodarczego na podstawie  
rozszerzonego modelu wzrostu Solowa-Swana z  
uwzględnieniem aspektu przestrzennego**

*Beata Bał-Domańska*

*Michał Bernard Pietrzak*

**Toruń, Poland 2014**

Beata Bal-Domańska

Beata.Bal-Domanska@ue.wroc.pl

Wrocław University of Economics, Department of Regional Economy,  
ul. Nowowiejska 3, 58-500 Jelenia Góra

Michał Bernard Pietrzak

pietrzak@umk.pl

Nicolaus Copernicus University in Toruń, Department of Econometrics and  
Statistics, ul. Gagarina 13a, 87-100 Toruń

## **Modelowanie rozwoju gospodarczego na podstawie rozszerzonego modelu wzrostu Solowa- Swana z uwzględnieniem aspektu przestrzennego**

**JEL Classification:** *C21, O11, R11*

**Keywords:** *augmented Mankiw-Romer-Weil growth model, spatial econometrics, Central and Eastern European regions*

**Abstract:** The objective of the article is to identify and evaluate spatial relations in terms of economic determinants for the regions of Central and Eastern European countries (in accordance with Eurostat methodology NUTS-2 stands for the corresponding level) having applied the construction of an augmented, neoclassical Mankiw-Romer-Weil growth model. The study covered the period of three years: 2000, 2005 and 2010. The obtained results confirmed the significance of spatial relations, in the evaluation of relations combining growth factors, for the level of economic growth. The statistically significant impact, however, was observed only in case of the factor illustrating human capital.

### **Wprowadzenie**

Dynamiczny rozwój badań nad wzrostem gospodarczym zainicjowały neoklasyczne modele wzrostu oparte na funkcji produkcji. Jedną z częściej wykorzystywanych konstrukcji modelowych jest model Solowa–Swana opracowany niezależnie przez Solowa (1956) i Swana (1956). Umożliwia on prowadzenie badań w zakresie wzrostu gospodarczego i jego czynników oraz procesów beta konwergencji. Model

w wersji podstawowej uwzględnia dwa czynniki produkcji: pracę oraz kapitał, względem których zakłada się ograniczoną substytucyjność. Z konstrukcji tego modelu wynika, że gospodarki mają naturalną, stałą tendencję do dążenia do stanu równowagi długookresowej, w którym stopa wzrostu produktu jest sumą egzogenicznego względem gospodarki postępu technicznego oraz stopy wzrostu zatrudnienia (zob. Romer 2012, Welfe 2001, Tokarski 2005).

Wraz z rozwojem teorii ekonomii i pojawianiu się nowych zjawisk w gospodarce pojawiła się teoria wzrostu endogenicznego, wśród przedstawicieli której wymienić można: Lucas (1988), Romer (1990, 1986), Barro (1991). W modelach tych odchodzi się od założenia o stałych korzyściach skali funkcji produkcji w gospodarce, a także próbuje się wyjaśnić proces kształtowania się postępu technicznego i stopy oszczędności (inwestycji) w skali całej gospodarki. W modelach wzrostu endogenicznego źródeł postępu technicznego poszukuje się w akumulacji wiedzy naukowo-technicznej oraz kapitału ludzkiego. Zakłada się, że tempo akumulacji wiedzy naukowo-technicznej lub kapitału ludzkiego wynika z celowych inwestycji. Przyzwala się na występowania efektów zewnętrznych związanych z wykorzystaniem wiedzy, postępu technicznego i kapitału. Oznacza to, że inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki prowadzą do wzrostu produktywności wyższej od prywatnych korzyści [Tokarski 2005]. W pierwszych modelach powstałych w ramach tego nurtu podstawowy zestaw czynników produkcji poszerzono o kapitał ludzki [zob. Mankiwa, Romer, Weil 1992] – zwany dalej MRW, który wprowadzono poprzez uwzględnienie niezależnych zmiennych objaśniających, wskazując tym samym, że postęp następuje głównie poprzez jego wykorzystanie przez pracowników (zob. Welfe 2001). Zasoby te oddziałują na procesy produkcyjne w taki sam sposób jak podstawowe dwa czynniki (kapitał rzeczowy i efektywna praca).

Jeżeli weźmiemy pod uwagę rozszerzony model Solowa – zgodnie z ideą MRW – to funkcję produkcji uwzględniającą kapitał ludzki  $H(t)$  można zapisać jako:

$$Y(t) = K(t)\alpha H(t)\beta A(t)L(t)\gamma,$$

gdzie:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – elastyczności produktu/dochodu względem wybranego czynnika produkcji. Oznacza to, że w każdym punkcie czasu ( $t$ ) gospodarka dysponuje pewnym zasobem kapitału ( $K$ ), siły roboczej ( $L$ ) i wiedzy ( $A$ )<sup>1</sup>, które są połączone ze sobą w celu wytworzenia produktu/dochodu ( $Y$ ). Funkcja  $A(t)$  opisuje użyteczną w procesie produkcji zakumulowaną wiedzę

---

<sup>1</sup> Określanej także efektywnością pracy, poziomem technologii, łączną produktywnością czynników produkcji (*total factor productivity*).

Najczęściej do analiz z zakresu rozwoju gospodarczego wykorzystywane były dane o państwach i regionach w postaci szeregów przekrojowych (np. o regionach zob. Markowska, Jefmański 2001) lub panelowych (np. dla państw Ciołek 2004, regionów Pietrzak 2012, Bal-Domańska 2010, 2013). W analizach ekonometrycznych z zakresu rozwoju gospodarczego konstruowanych na podstawie danych przekrojowych czy panelowych, pojawia się problem powiązania zjawisk ponad granicami zdefiniowanymi administracyjnie. Dobrze obrazuje tę sytuację przykład dużych ośrodków miejskich, które najczęściej obejmują obszar jednego regionu oraz ich sąsiadów. Pomiedzy nimi istnieją często bardzo silne powiązania gospodarcze wynikające z lokalizacji, a związane między innymi z dojazdami do pracy, powiązaniem między firmami a dostawcami i podmiotami współpracującymi. W takiej sytuacji zasięg oddziaływania przekracza granice administracyjne pojedynczej jednostki. Zachodzi zjawisko korelacji między regionami. Stąd coraz częściej pojawiają się analizy, które w swojej konstrukcji uwzględniają aspekt relacji przestrzennych (zob. Anselin, Bera 1998, Arbia 2006, Bal-Domańska 2013a, 2013b, Pietrzak 2010, 2012).

Celem artykułu jest oszacowanie rozszerzonego modelu wzrostu Solowa-Swana (MRW) z wykorzystaniem narzędzi ekonometrii przestrzennej, co pozwoli na uwzględnienie potencjalnych zależności przestrzennych między regionami. Podstawą analizy będą dane przestrzenne dla 40 regionów Europy Środkowo-Wschodniej w latach 2000, 2005 i 2010. Podstawowym elementem analizy jest pomiar i ocena istotności wpływu czynników wzrostu na rozwój regionalny państw regionów Europy Środkowo-Wschodniej. Dodatkowo poddane ocenie zostanie hipoteza o istotnym wpływie zależności przestrzennych na otrzymane wyniki.

### **Procedura identyfikacji przestrzennych zależności w rozwoju regionalnym**

Do identyfikacji relacji łączących czynniki wzrostu z poziomem rozwoju regionalnego wykorzystano następującą konstrukcję modelową:

$$\ln PKB_i = \lambda_1 \ln S_i + \lambda_2 \ln(n_i + g + \delta) + \lambda_3 \ln TETR_i + \alpha_0 + \varepsilon_i.$$

gdzie:

PKBi – produkt krajowy brutto według parytetu siły nabywczej na 1 pracującego w wieku 15 lat i więcej w i-tym regionie i danym roku,

$S_i$  – stopa inwestycji, gdzie inwestycje zostały zdefiniowane jako udział nakładów brutto na środki trwałe w produkcie krajowym brutto w  $i$ -tym regionie i danym roku,

$(n_i+g+\delta)$  – przyrost liczby pracujących (pracujący według metodologii ESA95) w  $i$ -tym regionie i danym roku powiększone o stopę deprecjacji i stopę postępu technicznego<sup>2</sup>,

$TETR_i$  – udział ludności aktywnej zawodowo z wyższym wykształceniem w wieku 25-64 lata w ogólnej liczbie aktywnych zawodowo w  $i$ -tym regionie i danym roku.

W modelu dopuszczono możliwość wystąpienia interakcji przestrzennych między regionami położonymi w swoim bezpośrednim sąsiedztwie (zob. Suchecki 2010). W tym celu struktura modelu rozszerzona została o macierz wag  $W$  opisujących odległości między obiektami (regionami) (zob. Młodak 2012). Rozważono dwa sposoby wprowadzenia macierzy opóźnień do modelu:

- pierwszy sposób polegał na dodaniu do prawej strony modelu struktury przestrzennej zmiennej endogenicznej. Otrzymujemy w ten sposób model autoregresji przestrzennej (SAR/SLM Spatial Autoregressive Model /Spatial Lag Model), co oznacza, że wartości zmiennej endogenicznej z jednostki  $s$  wpływają na kształtowanie się zmiennej w jednostce  $i$  i innych lokalizacjach. Zapisujemy to następująco:

$$\ln PKB_i = \lambda_0 (\mathbf{W} \ln PKB) + \lambda_1 \ln S_i + \lambda_2 \ln(n_i + g + \delta) + \lambda_3 \ln TETR_i + \alpha_0 + \varepsilon_i$$

$\varepsilon_i \sim IID$

- drugi sposób wprowadzenia macierzy opóźnień do modelu polegał na uwzględnieniu zależności przestrzennych w składniku losowym. Model ten nosi nazwę modelu błędu przestrzennego (SEM Spatial Error Model). Korzystamy z niego, gdy w modelu pominięto zmienne przestrzennie autoskorelowane. Jego struktura jest następująca:

$$\ln PKB_i = \lambda_1 \ln S_i + \lambda_2 \ln(n_i + g + \delta) + \lambda_3 \ln TETR_i + \alpha_0 + \varepsilon_i$$

$\varepsilon_i = \sigma(\mathbf{W}\varepsilon)_i + \xi_i$

Do wyboru struktury przestrzennej wykorzystany został test LM (zob. Anselin, Bera 1998). Test ten pozwala na wybór właściwej specyfikacji modelu przestrzennego.

---

<sup>2</sup> Stopę deprecjacji i postępu technicznego ustalono na standardowo przyjmowanym w większości badań poziomie 0,05.

Analizę przeprowadzono oddzielnie dla trzech lat 2000, 2005 i 2010. W badaniu uwzględniono 40 ( $i = 1, 2, \dots, 40$ ) regionów szczebla NUTS-2 państw Europy Środkowo-Wschodniej: Republiki Czeskiej (8 regionów), Estonii (1), Litwy (1), Łotwy (1), Polski (16), Węgier (7), Słowenii (2) i Słowacji (4).

Modele opóźnienia przestrzennego (SAR/SLM) szacowane zostały metodą największej wiarygodności. Modele błędu przestrzennego (SEM) oszacowano metodą GLS, a  $\sigma$  przez optymalizację. Wszystkie obliczenia wykonano w programie R-Cran (zob. Kopczevska 2006).

Ważnym etapem badania jest wybór poprawnej struktury modelu oraz ocena czy wprowadzenie struktury przestrzennej polepszyło jakość oszacowań. W tym celu oceniono siłę autokorelacji przestrzennej. Występowanie autokorelacji przestrzennej przejawia się powstawaniem skupień regionów o podobnych wartościach (dodatnia autokorelacja) lub sąsiedowaniem ze sobą regionów o skrajnie różnych wartościach (ujemna autokorelacja). Do pomiaru zależności przestrzennych najczęściej wykorzystywana jest statystyka I Morana (zob. Moran 1947, *Cliff; Ord 1981*).

## **Wyniki oszacowania modeli wzrostu MRW - aspekt przestrzenny**

Analizę rozpoczęto od oszacowania modeli wzrostu dla każdego z rozpatrywanych lat w postaci klasycznej (bez struktury przestrzennej z wykorzystaniem klasycznej metody najmniejszych kwadratów). Wyniki estymacji podano w tab. 1. Dla reszt każdego z modeli ustalono wartość statystyki przestrzennej korelacji I Morana. Wartości statystyk potwierdzają istnienie statystycznie istotnych zależności przestrzennych w każdym z analizowanych lat. Wymusza to uwzględnienie tych zależności w specyfikacji estymowanych modeli ekonometrycznych.

Rozważono dwie specyfikacje modeli związane z wprowadzeniem struktury przestrzennej, tj. model opóźnienia przestrzennego (SAR) oraz model błędu przestrzennego (SEM). Do ustalenia struktury przestrzennej wykorzystany został test LM. Wyniki testu LM, zarówno w wersji standardowej jak i odpornej przedstawiono w tabeli 2. Zgodnie ze wskazaniami testu dla 2000 roku najlepszy okazał się model opóźnienia przestrzennego (SAR), natomiast dla pozostałych dwóch lat model błędu przestrzennego (SEM).

**Tabela 1.** Wartości oszacowań modeli wzrostu MRW klasyczną metodą najmniejszych kwadratów

Wyszczególnienie	Lata		
	2000	2005	2010
Stała ( $\alpha_0$ )	5,19 (0,0001)	6,65 (0,0001)	7,33 (0,0001)
$\lambda_1 \ln S$	1,10 (0,0001)	0,58 (0,0317)	0,33 (0,3905)
$\lambda_2 \ln(n_i+g+\delta)$	-0,35 (0,5951)	-0,66 (0,7090)	-1,88 (0,2881)
$\lambda_3 TETR$	0,18 (0,1401)	0,34 (0,0637)	0,41 (0,0381)
Statystyka <i>I</i> <i>Morana</i> dla reszt	0,3314 (0,0006)	0,3240 (0,0008)	0,3157 (0,0011)

W nawiasach podano wartość *p*.

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Wyniki testu *LM*

Wyszczególnieni e	Lata					
	2000		2005		2010	
	statystyk a	wartość <i>p</i>	statystyk a	wartość <i>p</i>	statystyk a	wartość <i>p</i>
<i>LMerr</i>	7,9233	0,0048	7,5739	0,0059	7,1911	0,0073
<i>RLMerr</i>	0,0017	0,9676	5,3406	0,0208	19,6985	0,0001
<i>LMIag</i>	9,7888	0,0017	4,8499	0,0276	2,1424	0,1433
<i>RLMIag</i>	1,8672	0,1718	2,6165	0,1058	14,6497	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Następnie zgodnie ze wskazaniem testu *LM* oszacowano modele wzrostu z uwzględnieniem struktury przestrzennej (tab. 3). Dla każdego z analizowanych lat odnotowano dodatnie zależności przestrzennych (oceny parametrów  $\lambda_0$  i  $\sigma$ ). Przyjęcie przestrzennych specyfikacji modeli pozwoliło na wykluczenie autokorelacji przestrzennej składnika losowego, na co wskazują uzyskane wartości statystyki *I* Morana (tab. 3).

Spośród analizowanych trzech czynników wzrostu jedynie dla wykształcenia odnotowano statystycznie istotny wpływ na poziom rozwoju regionalnego w każdym z analizowanych lat. W przypadku stopy inwestycji w jej istotny wpływ odnotowany został wyłącznie w 2000 roku. Co interesujące wykształcenie odznaczało się coraz wyższą elastycznością względem poziomu rozwoju regionalnego. W 2000 roku wzrost stopnia wykształcenia pracowników o 1% wiązał się z wyższym poziomem rozwoju regionalnego o 0,3% *ceteris paribus*. Oznacza, to że poziom rozwoju społeczno-gospodarczego regionów państw Europy Środkowo-

Wschodniej rósł wolniej niż poziom wykształcenia pracowników. W 2005 roku elastyczność stopnia wykształcenia wzrosła do poziomu 0,851%, a w 2010 roku wynosiła aż 0,963%, co oznaczało, że zjawiska te zmieniały się w tym samym kierunku niemal w tym samym tempie.

**Tabela 3.** Oszacowania przestrzennych modeli wzrostu MRW

Wyszczególnienie	Lata		
	2000 (SAR)	2005 (SEM)	2010 (SEM)
Stała ( $\alpha_0$ )	-0,199 (0,8514)	6,861 (0,0011)	6,620 (0,0001)
$\lambda_1 \ln S$	0,856 (0,0001)	0,029 (0,9007)	-0,033 (0,8653)
$\lambda_2 \ln(n_i+g+\delta)$	-0,619 (0,2129)	-1,435 (0,1280)	-0,383 (0,7084)
$\lambda_3 TETR$	0,300 (0,0011)	0,851 (0,0001)	0,963 (0,0001)
$\lambda_0$ (SAR)/ $\sigma$ (SEM)	$\lambda_0 = 0,638$	$\sigma = 0,85$	$\sigma = 0,845$
Statystyka <i>I</i> <i>Morana</i> dla reszt	0,0983 (0,1320)	-0,0038 (0,4231)	0,0104 (0,3749)

Źródło: opracowanie własne.

## Podsumowanie

Celem artykułu była estymacja rozszerzonego, neoklasycznego modelu wzrostu Mankiwa, Romera, Weila z uwzględnieniem zależności przestrzennych. Badanie przeprowadzono dla regionów państw Europy Środkowo-Wschodniej dla trzech kolejnych lat 2000, 2005 i 2010. Uzyskane wyniki potwierdziły istotność zależności przestrzennych w ocenie relacji łączących czynniki wzrostu na poziom rozwoju gospodarczego.

Innowacją wykorzystaną w tym artykule było rozszerzenie struktury modelu wzrostu Mankiwa, Romera, Weila o aspekt przestrzenny. Na podstawie przeprowadzonej analizy wyciągnięto następujące wnioski:

- zależności przestrzenne na poziomie regionów NUTS-2 Europy Środkowo-Wschodniej okazały się istotne dla modelowanych relacji w każdym z badanych lat 2000, 2005 i 2010,
- modele przestrzenne pozwoliły wskazać poziom wykształcenia jako czynnik istotny dla poziomu rozwoju gospodarczego w



każdym z badanych okresów, przy czym ich wpływ na poziom rozwoju gospodarczego wzrastał w kolejnych latach analizy,

- istotny wpływ stopy inwestycji ustalony został wyłącznie dla 2000 roku,
- dla wszystkich lat wpływ przyrostu liczby pracujących powiększonych o stopę deprecjacji i stopę postępu technicznego okazał się statystycznie nieistotny.

## Bibliografia

- Anselin, L., Bera, A. (1998), *Spatial dependence in linear regression models with an introduction to spatial econometrics*, [w:] Ullah, A., Giles editors, D. E., *Handbook of Applied Economic Statistics*, New York Marcel Dekker, pp. 237-289.
- Arbia G (2006)., *Spatial econometrics*, Springer, Berlin Heidelberg.
- Bal-Domańska B. (2010), *Analiza zależności między innowacyjnością a dynamiką rozwoju europejskiej przestrzeni regionalnej* [w:] Strahl D., *Innowacyjność europejskiej przestrzeni regionalnej a dynamika rozwoju gospodarczego*, Uniwersytet Ekonomiczny, Wrocław, s. 114-154.
- Bal-Domańska B. (2013a), *Procesy konwergencji wydajności pracy w regionach Unii Europejskiej*, „Wiadomości Statystyczne” 2/2013, GUS, s. 1-14.
- Bal-Domańska B. (2013b), *Przestrzenne zróżnicowanie i uwarunkowania gospodarcze regionów Unii Europejskiej*, XXII Konferencja Naukowa Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS XXVII Konferencja Taksonomiczna nt. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”..
- Barro R.J. (1991), *Economic Growth in Cross Section of Countries*, „Quarterly Journal of Economic”, 106, s. 407-443.
- Ciołek D. (2004), *Szacowanie regresji wzrostu i konwergencji dla danych panelowych*, [w:] A. Welfe (red.) *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, tom 4 SGH w Warszawie, Oficyna Wydawnicza, Warszawa.
- Cliff A.D., Ord J.K. (1981), *Spatial Processes: Models and Applications*, London: Pion.
- Kopczewska K. (2006), *Ekonometria i statystyka przestrzenna z wykorzystaniem programu R CRAN*, CeDeWu.PL, Warszawa.
- Lucas R. (1998), *On the mechanics of economic development*, „Journal of Monetary Economics”, vol. 22, s. 3-42.
- Mankiw N.G., Romer D., Weil D. (1992), *A contribution to the empirics of economic growth*, „Quarterly Journal of Economics”, vol. 107, no. 2, s. 407-437.

- Markowska M., Jefmański B. (2012), *Fuzzy classification of European regions in the evaluation of smart growth*, „Przegląd Statystyczny”, Tom 59, Warszawa, s. 74-93.
- Młodak A. (2012), *Sąsiedztwo obszarów przestrzennych w ujęciu fizycznym oraz społeczno-ekonomicznym – podejście taksonomiczne*, [w:] Jajuga K., Walesiak M., *Taksonomia 19. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”*, Uniwersytet Ekonomiczny, s. 76-85.
- Moran P.A.P. (1947), *The Interpretation of Statistical Maps*, „Journal of the Royal Statistical Society”, s. 243-51.
- Pietrzak M. B. (2010), *Application of economic distance for the purposes of a spatial analysis of the unemployment rate for Poland*, „*Oeconomia Copernicana*”, 2010, vol. 1, s. 79-98.
- Pietrzak M. B. (2012), *Wykorzystanie przestrzennego modelu regresji przełącznikowej w analizie regionalnej konwergencji w Polsce*, „*Ekonomia i Prawo*”, T XI, nr 4/2012, s. 167-186.
- Romer D. (2012), *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Romer P.M. (1990), *Endogenous technological change*, „*Journal of Political Economy*”, vol. 5, s. 71-102.
- Romer P.M. (1986), *Increasing returns and long-run growth*, „*Journal of Political Economy*”, s. 1002-1037.
- Sala-i-Martin X. X.n(1996), *The Classical Approach to Convergence Analysis*. „*The Economic Journal*”, Vol. 106, No. 437, s. 1019-1036;
- Solow R. (1956), *A contribution to the theory of the economic growth*, „*Quarterly Journal of the Economics*”, vol. 70, s. 65-94.
- Suhecki B. (red.) (2010), *Ekonometria przestrzenna*, C.H. Beck, Warszawa.
- Swan T. (1956), *Economic growth and capital accumulation*, „*Economic Record*”, 32, s. 334-361.
- Tokarski T. (2005), *Statystyczna analiza regionalnego zróżnicowania wydajności pracy, zatrudnienia i bezrobocia w Polsce*, PWE, Warszawa.
- Welfe W. (red.) (2010), *Ekonometryczny model wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.