



**Institute of Economic Research Working Papers**

**No. 33/2013**

**Zastosowanie modelu MESS w przestrzenno-czasowej  
analizie stopy bezrobocia w Polsce**

*Iwona Müller-Frączek*

*Michał Bernard Pietrzak*

**Toruń, Poland 2013**

Iwona Müller-Frączek

muller@econ.umk.pl

Nicolaus Copernicus University in Toruń, Department of Econometrics and  
Statistics, ul. Gagarina 13a, 87-100 Toruń

Michał Bernard Pietrzak

pietrzak@umk.pl

Nicolaus Copernicus University in Toruń, Department of Econometrics and  
Statistics, ul. Gagarina 13a, 87-100 Toruń

## Zastosowanie modelu MESS w przestrzenno- czasowej analizie stopy bezrobocia w Polsce

**JEL Classification:** *C21, R11, R23, J64*

**Keywords:** *spatial econometrics, spatial autocorrelation, spatial model MESS, space-time analysis of the unemployment rate, spatial dependence*

**Abstract:** The purpose of the article was a space-time analysis of the unemployment rate in polish poviats. In the research we use a model in which spatial dependence is represented in the exponential form, based on the neighborhood matrix. This model, called the Matrix Exponential model, was proposed by J.P. LeSage and R.K. Pace in 2007. It is characterized by simplicity of estimation, which can compete with other known approaches. The presented analysis was a continuation of previous purely spatial studies (Müller-Frączek, Pietrzak 2011b). This article consists of three parts. Each of them provides an analysis of the unemployment rate registered in Poland at the end of the years 2004-2009. In the first part the unemployment rate was analyzed for each year separately. Almost linear changes of parameters of the space models, allowed us to build a space-time matrix exponential model MESS. It was described in the second part of the article. In the last part the results, obtained using the MESS model, were confronted with an approach based on space-time autoregressive model.

### Wprowadzenie

W obszarze zainteresowań autorów leży modelowanie zjawisk ekonomicznych, charakteryzujących się zależnościami przestrzennymi. Przestrzenne ujęcie zjawiska wymaga zastosowania metod oraz modeli ekonometrii przestrzennej. Termin ekonometria przestrzenna wprowadzony

został przez J. H. P Paelincka w 1974 roku. Od tego czasu zagadnienia związane z ekonometrią przestrzenną były często poruszane w literaturze zagranicznej, np. Cliff, Ord (1981), Anselin (1988), Haining (2005), Arbia (2006) oraz coraz częściej w literaturze polskiej, np. Zeliaś (1991), Szulc (2007), Suchecki (2010), Suchecki (2012).

Poprawny opis bezrobocia, jako jednego z ważniejszych negatywnych zjawisk społeczno-ekonomicznych, jest istotnym zadaniem ekonometrii. W tym nurcie mieszczą się również przedstawione w artykule wyniki badań. Ponieważ stopa bezrobocia jest procesem, w którym występują zależności przestrzenne, do jej opisu wykorzystano modele ekonometrii przestrzennej.

Zaprezentowano dwa podejścia badawcze – przestrzenne oraz przestrzenno-czasowe. W obu podejściach zależności przestrzenne oznaczające wpływ bezrobocia obserwowanego w jednym powiecie na bezrobocie w innych powiatach zostały ujęte w ramy modelu w postaci macierzy wykładniczej.

W części pierwszej badania prowadzono dla każdego roku oddzielnie. Za pomocą trendu przestrzennego scharakteryzowano globalną tendencję przestrzenną stopy bezrobocia w powiatach oraz zinterpretowano ekonomicznie zależności pomiędzy stopą bezrobocia a procesami przestrzennymi przyjętymi za determinanty.

Stacyczna analiza przestrzenna stopy bezrobocia w latach 2004-2009 stała się punktem wyjścia dla analizy przestrzenno-czasowej, której wyniki zawarto w części drugiej artykułu. Zauważono, że modele w poszczególnych latach posiadają pewne cechy wspólne, takie jak ten sam stopień trendu przestrzennego oraz podobny parametr zależności przestrzennej. Obserwacje te stanowiły podstawę ujęcia przestrzenno-czasowego. Dalsza analiza otrzymanych wyników wykazała w przybliżeniu liniową względem czasu zależność parametrów modeli przestrzennych i na tej podstawie stworzono model hipotetyczny, który dalej analizowano.

W części trzeciej porównano otrzymane wyniki z wcześniejszymi badaniami<sup>1</sup>, w których do opisu tego samego materiału statystycznego wykorzystano inny typ modelu przestrzenno-czasowego, tzw. autoregresyjny model przestrzenny SAR.

### **Procedura badawcza**

Modele wykorzystywane w artykule mają odzwierciedlić zależności przestrzenne i przestrzenno-czasowe, które można zaobserwować dla

---

<sup>1</sup> Por. Müller-Frańczek, Pietrzak (2011a, 2011b, 2012).

niektórych procesów, m.in. stopy bezrobocia. Zastosowano zarówno modele czysto przestrzenne, jak i dwa typy modeli przestrzenno-czasowych.

Jedną z metod uwzględnienia w formalnym opisie związków przestrzennych, obserwowanych w procesach ekonomicznych, jest wprowadzenie tzw. przestrzennej macierzy wag (ozn.  $W=(w_{i,j})$ ,  $i,j=1,\dots,n$ ), która określa siłę powiązań między  $n$  uporządkowanymi obszarami w przestrzeni. Postać macierzy wag może odzwierciedlać tylko geograficzną strukturę badanego obszaru, ale również może uwzględniać inne aspekty, np. ekonomiczne (por. Anselin 1988).

Najprostsze zastosowanie macierzy wag występuje w tzw. przestrzennym modelu autoregresyjnym SAR, który jest określony równaniem:

$$Y_i = \rho(WY)_i + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

gdzie:

- $X$ ,  $Y$  są procesami obserwowanym w przestrzeni (w danych lokalizacjach),
- $i=1,\dots,n$  jest numerem lokalizacji,
- $\varepsilon_i$  jest białym szumem przestrzennym.<sup>2</sup>

W modelu (1) macierz  $W$  wykorzystywana jest w postaci tzw. operatora opóźnienia przestrzennego, który określa wpływ na obserwację procesu objaśnianego w ustalonej lokalizacji i obserwacji tego procesu w innych lokalizacjach, czyli:

$$(WY)_i = \sum_{j=1,\dots,n} w_{i,j} Y_j.$$

W modelu SAR przyjmuje się ponadto, że na danym obszarze można określić globalną siłę związków zachodzących w procesie pomiędzy różnymi jego lokalizacjami, odzwierciedla ją parametr autoregresji przestrzennej  $\rho$ .

Inną możliwością odzwierciedlenia związków przestrzennych w modelach ekonometrycznych jest, zaproponowana przez LeSage oraz Pace w 2007 r.<sup>3</sup> specyfikacja wykładnicza (matrix exponential spatial specification MESS), przedstawiona równaniem:

$$e^{aW} Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i, \quad (2)$$

w którym

---

<sup>2</sup> Biały szum przestrzenny  $\varepsilon$  (por.: Szulc 2007), stanowią nieskorelowane zmienne losowe o własności:  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $i=1,\dots,n$ .

<sup>3</sup> W pracy tej można znaleźć szczegóły dotyczące własności oraz estymacji modeli MESS.

$$e^{\alpha W} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i W^i}{i!}$$

jest tzw. macierzą wykładniczą, natomiast pozostałe oznaczenia są takie jak w równaniu (1).

Jeżeli macierz  $W$  charakteryzuje geograficzne sąsiedztwo, wówczas sąsiedztwo  $i$ -tego rzędu wyznaczone jest przez macierze  $W_i$ . Użycie macierzy wykładniczej pozwala więc na bezpośrednie ujęcie w modelu MESS wpływu na badane zjawisko dalszych sąsiadów, a nie, tak jak w modelu SAR, tylko sąsiadów najbliższych. Ponadto postać wykładnicza powoduje znaczne uproszczenie procedury estymacyjnej.

W modelach przestrzenno-czasowych zakłada się, że macierz sąsiedztwa  $W$  nie zmienia się w czasie. Wówczas równania modeli SAR i MESS przyjmują odpowiedni postaci:

$$Y_{it} = \rho_t (WY)_{it} + \beta_t X_{it} + \varepsilon_{it}, \quad (3)$$

$$e^{\alpha_t W} Y_{it} = \beta_t X_{it} + \varepsilon_{it}, \quad (4)$$

gdzie:

- $X, Y$  są procesami obserwowanym w przestrzeni i czasie,
- $i=1, \dots, n$  jest numerem lokalizacji,
- $t=1, \dots, T$  jest numerem okresu,
- $\varepsilon_{it}$  jest białym szumem przestrzenno-czasowym.

W badaniach empirycznych wszystkie modele przestrzenne i przestrzenno-czasowe zostały rozszerzone o drugą zmienną objaśniającą oraz trend przestrzenny lub przestrzenno-czasowy.

## Materiał statystyczny

Badania empiryczne zostały przeprowadzone w oparciu o dane statystyczne pozyskane ze strony internetowej GUS i dotyczyły rocznej stopy bezrobocia rejestrowanego na koniec roku w powiatach Polski ( $n=379$ ) w latach 2004–2009 ( $T=6$ ). Wcześniejsze badania autorów (por. Müller-Frączek, Pietrzak 2011a, 2011b, 2012) wykazały, że stopa bezrobocia charakteryzuje się silnymi zależnościami przestrzennymi, co uzasadniło stosowanie w opisie tego zjawiska modeli opisanych w rozdziale 2. Ponadto zauważono, że stopa bezrobocia podlega pewnej globalnej tendencji przestrzennej, dlatego wykorzystywane w analizach empirycznych modele rozszerzono o trend przestrzenny.

Dla potrzeb badań przyjęto unormowaną macierz wag  $W$ , odzwierciedlającą geograficzne sąsiedztwo powiatów w sensie ich wspólnej granicy. Ponadto ustalone zostały środki ciężkości powiatów,

których współrzędne geograficzne wykorzystano przy estymacji trendów przestrzennych.

Analiza dostępnych danych statystycznych wykazała, że wśród potencjalnych determinant bezrobocia tylko dwie były statystycznie istotne. Tabela 1 przedstawia ekonomiczne procesy oraz ich oznaczenia wykorzystane w badaniach.

**Tabela 1.** Ekonomiczne procesy przestrzenne wykorzystane do modelowania stopy bezrobocia

Proces	Oznaczenie
Stopa bezrobocia rejestrowanego na koniec roku	$Y$
Inwestycje w tys. zł na mieszkańca	$X_1$
Liczba podmiotów gospodarczych na 10 000 mieszkańców	$X_2$

Źródło: opracowanie własne.

### Przestrzenne modele bezrobocia

W podejściu czysto przestrzennym szacowano dla każdego badanego roku oddzielnie model typu (2) z dwiema zmiennymi objaśniającymi oraz trendem przestrzennym. We wszystkich przypadkach przy estymacji parametrów statystycznie istotne okazały się wyłącznie współczynniki przy trendzie pierwszego stopnia. Przestrzenne modele stopy bezrobocia w powiatach dla wszystkich kolejnych lat przybrały więc hipotetyczną postać określoną równaniem<sup>4</sup>:

$$e^{aW} Y = a + bx + cy + \beta X_1 + \gamma X_2 + \varepsilon (5)$$

gdzie:

- $W$  – macierz sąsiedztwa powiatów na podstawie wspólnej granicy,
- $(x, y)$  – współrzędne geograficzne środków ciężkości powiatów,
- $X_1$  – inwestycje,
- $X_2$  – liczba podmiotów gospodarczych,
- $\varepsilon$  – szum przestrzenny.

Wyniki estymacji parametrów modeli empirycznych określonych równaniem (5) dla poszczególnych lat przedstawia tabela 2. Zarówno parametry strukturalne modelu jak i trend przestrzenny okazały się statystycznie istotne.

<sup>4</sup> W celu uproszczenia zapisu indeks lokalizacji  $i$  został pominięty we wszystkich modelach empirycznych.

**Tabela 2.** Wyniki estymacji parametrów przestrzennych modeli stopy bezrobocia określonych równaniem (5)

Parametry		Modele					
		2004	2005	2006	2007	2008	2009
$\alpha$	ocena	-0,79	-0,77	-0,78	-0,75	-0,74	-0,69
	statystyka T	-12,27	-12,09	-11,93	-11,61	-11,30	-10,53
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00
$a$	ocena	19,23	18,10	15,75	12,69	10,95	13,71
	statystyka T	10,22	10,04	9,07	7,98	7,22	8,45
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00
$b$	ocena	-0,97	-0,84	-0,69	-0,44	-0,30	-0,47
	statystyka T	-5,41	-4,85	-4,10	-2,83	-2,05	-3,05
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00
$c$	ocena	0,83	0,78	0,65	0,56	0,54	0,65
	statystyka T	4,72	4,58	3,95	3,68	3,76	4,31
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00
$\beta$	ocena	-1,27	-1,34	-1,12	-0,72	-0,52	-0,45
	statystyka T	-6,21	-7,14	-6,85	-6,15	-5,58	-4,60
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00
$\gamma$	ocena	-0,76	-0,70	-0,61	-0,57	-0,55	-0,68
	statystyka T	-6,41	-6,20	-5,46	-5,52	-5,66	-6,75
	p-value	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00	≈0,00

Źródło: obliczenia własne w programie R-CRAN na podstawie danych GUS.

Poprawność specyfikacji modeli zbadano obliczając odpowiednie charakterystyki. Były to: wartość współczynnika determinacji, wartość globalnej statystyki Morana oraz ocena jej istotności. Wartości wymienionych charakterystyk zostały przedstawione w tabeli 3. Świadczą one o dobrym dopasowaniu modeli do danych statystycznych oraz braku autokorelacji w resztach.

**Tabela 3.** Własności statystyczne modeli określonych równaniem (5)

Własności	Modele					
	2004	2005	2006	2007	2008	2009
$R^2$	0,59	0,58	0,55	0,52	0,50	0,49
$I$	0,031	0,029	0,037	0,018	0,007	0,016
$(I-E(I))/S(I)$	0,981	0,925	1,152	0,600	0,297	0,548
p-value	0,163	0,178	0,124	0,274	0,383	0,292

Źródło: obliczenia własne w programie R-CRAN na podstawie danych GUS.

Porównując modele przedstawione w tabeli 2 można stwierdzić, że do 2008 roku zmiany wartości parametrów podlegają pewnej tendencji, natomiast model dla roku 2009 odbiega od swych poprzedników.<sup>5</sup> Jego

<sup>5</sup> Różnica ta wynika z sytuacji globalnej związanej ze światowym kryzysem gospodarczym.

odmienność jest szczególnie widoczna dla parametrów trendu, który odzwierciedla globalną przestrzenną tendencję badanego zjawiska. Przede wszystkim zmniejsza się stała przy trendzie, co oznacza, że globalnie stopa bezrobocia w okresie 2004-2008 była coraz niższa. Ponadto nachylenie płaszczyzny trendu, wyznaczane przez wartości  $b$  i  $c$  staje się coraz mniej strome, maleją więc dysproporcje stopy bezrobocia pomiędzy poszczególnymi powiatami. Te pozytywne z ekonomicznego punktu widzenia efekty zanikają w roku 2009. Wprawdzie nie zmieniają się znaki współczynników przy trendzie przestrzennym, jednak ich wartości bezwzględne wzrastają w stosunku do roku poprzedniego.

Dla wszystkich badanych lat otrzymano ujemne współczynniki  $\beta$ ,  $\gamma$  przy zmiennych objaśniających, co odzwierciedla korzystny wpływ wzrostu inwestycji oraz ilości podmiotów gospodarczych na spadek stopy bezrobocia w powiatach. Jednak da się zauważyć, że w miarę upływu lat wpływ czynnika  $X_1$  stale maleje, natomiast nieznacznie malejący wpływ zmiennej  $X_2$  zmienił swój charakter w roku 2009.

We wszystkich sześciu modelach istnieją silne zależności przestrzenne, co wyraża wartość parametru  $\alpha$  na średnim bezwzględnym poziomie równym 0,75. Niewielki spadek wartości tego parametru w czasie świadczy o słabnących zależnościach przestrzennych stopy bezrobocia w miarę poprawiającego się poziomu rozwoju społeczno-ekonomicznego w Polsce.

## 5. Przestrzenno-czasowy model bezrobocia

Analiza zmian w czasie wartości parametrów przestrzennych modeli MESS doprowadziła do budowy hipotetycznego modelu przestrzennego-czasowo typu (3), w którym parametr  $\alpha$  odzwierciedlający zależności przestrzenne jest stały, ponieważ dla modeli statycznych jego zmiany były niewielkie. Ponieważ próba statystyczna kończy się na roku 2009 nie można sprawdzić, czy odmienność zaobserwowana dla tego roku ma charakter jednorazowy, czy trwały. Dlatego dla pozostałych parametrów przyjęto liniową zależność względem czasu, mimo, że model dla 2009 mocno od niej odbiega. Hipotetyczny przestrzenno-czasowy model MESS dla stopy bezrobocia opisano równaniem:

$$e^{\alpha W} Y_t = a_0 + a_1 t + (b_0 + b_1 t)x + (c_0 + c_1 t)y + (6)$$

$$+ (\beta_0 + \beta_1 t)X_{1t} + (\gamma_0 + \gamma_1 t)X_{2t} + \varepsilon_t$$

gdzie:

- $W$  – macierz sąsiedztwa powiatów na podstawie wspólnej granicy,
- $t$  – numer roku,
- $(x,y)$  – współrzędne geograficzne środków ciężkości powiatów,



- $X_1$  – inwestycje,
- $X_2$  – liczba podmiotów gospodarczych,
- $\varepsilon$  – szum przestrzenno-czasowy.

W tabeli 4 zamieszczono wyniki estymacji parametrów modelu określonego równaniem (6). Analiza przedstawionych wyników pozwala na stwierdzenie, że parametry modelu oraz trend przestrzenny okazały się statystycznie istotne.

**Tabela 4.** Parametry czasowo-przestrzennego modelu określonego równaniem (6)

Parametry	Oceny	statystyka T	p-value
$\alpha$	-0,80	-30,54	$\approx 0,00$
$a_0$	20,42	13,45	$\approx 0,00$
$a_1$	-1,61	-4,20	$\approx 0,00$
$b_0$	-1,07	-7,07	$\approx 0,00$
$b_1$	0,13	3,31	$\approx 0,00$
$c_0$	0,89	6,07	$\approx 0,00$
$c_1$	-0,06	-1,66	0,10
$\beta_0$	-1,68	-11,02	$\approx 0,00$
$\beta_1$	0,22	6,51	$\approx 0,00$
$\gamma_0$	-0,73	-7,28	$\approx 0,00$
$\gamma_1$	0,03	1,04	0,30

Źródło: obliczenia własne w programie R-CRAN na podstawie danych GUS.

Jakość statystyczną modelu oceniano stosując te same miary co dla modeli statycznych. Wyniki, które przedstawiono w tabeli 6, świadczą o dobrym dopasowaniu modeli do danych empirycznych oraz o braku zjawiska autokorelacji przestrzennej w resztach.

Porównanie otrzymanych wyników estymacji z wynikami zawartymi w tabeli 2 pokazuje, że<sup>6</sup> model przestrzenno-czasowy prawidłowo opisał zarówno wpływ determinant na stopę bezrobocia jak i zmiany zaobserwowane dla kolejnych lat badania. Można zauważyć, że płaszczyzna trendu we wszystkich latach nachylona jest w tę samą, jak dla modeli statycznych stronę. W miarę upływu czasu płaszczyzna przesuwana się w dół, a jej nachylenie staje się mniej strome. Przy obu determinantach współczynniki są ujemne, co odzwierciedla korzystny wpływ wzrostu obu z nich na spadek stopy bezrobocia. Ponadto wpływ zmiennej  $X_1$  zanika dużo szybciej niż zmiennej  $X_2$ .

<sup>6</sup> Rozważania, zawarte w tym akapicie, zachodzą dla dodatnich, ale dostatecznie małych wartości indeksu czasu  $t$ .

## Porównanie modeli MESS i SAR

Dla pogłębienia badań nad czasowo-przestrzennym modelowaniem stopy bezrobocia porównano model MESS z modelem SAR opisanym równaniem:

$$Y_t = \rho W Y_t + a_0 + a_1 t + (b_0 + b_1 t)x + (c_0 + c_1 t)y + (7)$$

$$+ (\alpha_0 + \alpha_1 t)X_{1t} + (\beta_0 + \beta_1 t)X_{2t} + \varepsilon_t,$$

w którym:

$\rho$  – oznacza parametr autoregresji przestrzennej, natomiast pozostałe oznaczenia są takie jak we wzorze (6).

**Tabela 5.** Porównanie odpowiednich parametrów modeli przestrzenno-czasowych

Parametry	model MESS		model SAR	
$a_0$	20,42		17,44	
$a_1$	-1,61		-1,28	
$b_0$	-1,07		-0,91	
$b_1$	0,13		0,10	
$c_0$	0,89		0,65	
$c_1$	-0,06		-0,04	
$\beta_0$	-1,68		-1,57	
$\beta_1$	0,22		0,20	
$\gamma_0$	-0,73		-0,70	
$\gamma_1$	0,03		0,02	
$\alpha / \rho$	-0,80		0,66	

Źródło: obliczenia własne w programie R-CRAN na podstawie danych GUS.

W tabeli 5 porównano parametry modeli opisanych równaniami (6) i (7).<sup>7</sup> Analizując wartości zawarte w tabeli 5 można zauważyć, że zarówno współczynniki przy trendzie przestrzennym jak i parametry strukturalne dla obydwu modeli są bardzo podobne, dokładniej – nieco mniejsze dla modelu SAR. Można więc powiedzieć, że obydwa modele podobnie odzwierciedlają globalne tendencje przestrzenne w stopie bezrobocia oraz wpływ na to zjawisko rozważanych determinant.

Spora różnica występuje natomiast w odzwierciedlaniu powiązań przestrzennych. Wartość wyrażenia  $1-\alpha$  wynosi 0,55 i tyle powinien wynosić parametr  $\rho$  w modelu SAR, gdyby między modelami zachodziła pełna odpowiedniość.<sup>8</sup> Ponieważ w modelu empirycznym parametr ten wynosi 0,66, można stwierdzić, że powiązania przestrzenne w modelu SAR są silniejsze niż w modelu MESS. Jakość statystyczną obydwu modeli porównano w tabeli 6.

**Tabela 6.** Własności statystyczne przestrzenno-czasowych modeli stopy bezrobocia

Własności	model MESS	model SAR
$R^2$	0,650	0,690
$I$	0,020	0,012
$(I-E(I))/S(I)$	1,487	0,915
p-value	0,069	0,180

Źródło: obliczenia własne w programie R-CRAN na podstawie danych GUS.

Analizując wyniki zawarte w tabeli 6 można stwierdzić, że obydwa modele charakteryzowały się dobrymi własnościami statystycznymi, przy czym nieznacznie lepszy okazał się model SAR.

Podobny wniosek został wysunięty w badaniach prowadzonych nad czysto przestrzennym modelem MESS dla stopy bezrobocia w roku 2007. Wówczas odpowiedni model SAR, też miał nieco lepsze dopasowanie do danych. Hipoteza zawarta w poprzednim artykule, że ze względu na prostotę obliczeniową MESS przewyższy dopasowaniem SAR, gdy zwiększy się ilość obserwacji, nie potwierdziła się. Być może z powodu nadal za małej liczby obserwacji albo zbyt małej liczby obserwacji w przestrzeni.

<sup>7</sup> Wyniki dotyczące modelu SAR zaczerpnięto z Müller-Frączek, Pietrzak 2011b.

<sup>8</sup> Por.: LeSage, Pace 2007.

## Podsumowanie

W artykule zaprezentowano analizę stopy bezrobocia w powiatach w latach 2004-2009 z wykorzystaniem modeli opartych na wykładniczym przedstawieniu macierzy sąsiedztwa. Przeprowadzone badania pozwoliły na identyfikację trendu przestrzennego oraz ujemnych zależności między stopą bezrobocia a inwestycjami i liczbą podmiotów gospodarczych przypadających na mieszkańca. Zarówno dla parametrów trendu, jak i założonych procesów determinant ustalono liniowy charakter zmian w czasie. Wszystkie estymowane modele cechowały dobre własności statystyczne oraz ekonomiczna interpretowalność parametrów.

Porównanie wyników z wcześniejszymi analizami przestrzenno-czasowymi nie dało jednoznacznej odpowiedzi, które podejście jest lepsze, czy oparte na postaci wykładniczej, czy na operatorze opóźnień przestrzennych. Odpowiedzią mogą być dalsze badania oceniające jakość prognostyczną obydwu podejść.

## References

- Anselin, L. (1988), *Spatial Econometrics: Method and Models*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Arbia, G. (2006), *Spatial Econometrics*, Springer-Verlag GmbH.
- Clif, A., Ord J. (1981), *Spatial Processes, Models and Applications*, Pion, London.
- Haining, R.P. (2005), *Spatial Data Analysis. Theory and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge.
- LeSage, J.P., Pace, R.K. (2007), *A Matrix Exponentials Spatial Specifications*, Journal of Econometrics, 140:1.
- LeSage, J.P., Pace R. K. (2009), *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press.
- Müller-Frączek I., Pietrzak M.B. (2011a), *Space-time modelling of the unemployment rate in Polish poviats*, „Dynamic Econometric Models” vol. 11, Wydawnictwo UMK, s. 203-213.
- Müller-Frączek I., Pietrzak M.B. (2011b), *Analiza stopy bezrobocia w Polsce z wykorzystaniem przestrzennego modelu MESS*, „Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomia” 253, s. 215-223.
- Müller-Frączek I., Pietrzak M.B. (2012), *Analiza stopy bezrobocia w Polsce w ujęciu przestrzenno-czasowym*, „Oeconomia Copernicana” nr 2, Wydawnictwo UMK, s. 43-55.
- Sucecki, B. (2010), *Ekonometria Przestrzenna*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa.
- Sucecki, B. (2012), *Ekonometria Przestrzenna II*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa.

- Szulc, E. (2007), *Ekonometryczna analiza wielowymiarowych procesów*, Wyd. UMK, Toruń.
- Zeliaś, A. (1991), *Ekonometria Przestrzenna*, PWE, Warszawa.